＜数学＞

問題：以下の問（１）～（５）に答えよ。

（１）x, y, z 軸で定義される直交座標系において、ベクトル関数Ψ

$$\Psi = \left(\sin x \sin y\,,\quad x^2 + \frac{1}{y},\quad y + e^{2z}\right)$$

とする。

（１－１）$\Psi = (0, 0, 0)$ となる (x, y, z) 座標を 2 点求めよ。

（１－２）$\mathrm{rot}\,\Psi$ を求めよ。

（２）x, y, z 軸で定義される直交座標系において、スカラー関数Φを

$$\Phi = xyz$$

とし、位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$、二つの面 $y - 2x = 0$ と $\mathrm{z} - 3x = 0$ の交線を経路 c とする。経路 c に沿って、点 P $(0, 0, 0)$ から点 Q $(1, 2, 3)$ までの、次の線積分を求めよ。

$$\int_c \mathrm{grad}\,\Phi \cdot d\boldsymbol{r}$$

（３）行列 A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。なお、固有ベクトルは単位ベクトルで表示すること。

（次ページに続く）

（４）物理量 T が空間座標 x と時間 t の関数とし、偏微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(T(x,t)) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(T(x,t))$$

が成り立っているとする。物理量 T が

$$T(x,t) = a\sin(mx - \omega t)$$

のとき、m と ω の関係を求めよ。なお、a, c, m, ω, は空間座標 x と時間 t によらないものとする。

（５）$a > 0$ として、関数 $f(x)$ を以下のように定義する。

$$f(x) = e^{-ax}\ (x > 0), \qquad f(x) = 0\ (x < 0)$$

このとき、関数 $f(x)$のフーリエ変換を求めよ。なお、関数 $g(u)$のフーリエ変換 $G(w)$は次式で与えられる。

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-iwu}\, du$$